Cvičení z teorie pravděpodobnosti 2

5. Optional Sampling Theorem, Optional Stopping Theorem

- ověření předpokladů Optional Sampling Theorem
- rozpoznání martingalu, který je sub či super-martingalem

---

1. Nechť $M_n, n \in \mathbb{N}$ je nezáporný $\mathcal{F}_n$-martingal. Rozhodněte, zda je obecně proces M_{τ_n} sub/super-martingalem vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_{\tau_n}$, kde $\tau_n \leq \tau_{n+1}$ jsou $\mathcal{F}_n$-markovské časy
   (a) konečné skoro jistě.
   (b) skoro jistě omezené konečnou hodnotou.
   (c) takové, že zastavený proces $M_{k\wedge\tau_n}, k \in \mathbb{N}$ je omezený pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   (d) takové, že proces $M_{\tau_n}, n \in \mathbb{N}$ má konstantní střední hodnotu
   (e) takové, že zastavený proces $M_{k\wedge\tau_n}, k \in \mathbb{N}$ je stejnoměrně integrovatelný pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   (f) Rozhodněte o platnosti (a),(b),(c), pokud proces M_n není zdola omezený.
   (g) Rozhodněte o platnosti (a), není-li M_n zdola omezený a je stejnoměrně integrovatelný.

2. Uvažujte urnu, ve které je na počátku v čase $n = 0$ umístěno celkem b bílých a c černých kuliček. V každém časovém intervalu $(n-1, n)$ jednou vytáhneme náhodně vybranou kuličku z urny a vrátíme ji zpět spolu s dalšími celkem z kuličkami stejné barvy. Buď T_n relativní počet kuliček bílé v čase n a τ_k buď pořadí tahu, ve kterém po k-té z urny vytáhneme bílou kouli. Rozhodněte,
   (a) zda jsou časy τ_k markovské a zda jsou konečné skoro jistě
   (b) zda je proces $S_n = T_{\tau_n}$ martingal

3. Buď $(X_n, n \in \mathbb{N})$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených integrovatelných náhodných veličin. Buď $Z_{-n} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k$ a $\tau_k = \inf\{-n; n \in \mathbb{N}, \overline{X}_n \geq k\} \wedge (-1), k \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda
   (a) je proces Z_{τ_k} martingalem
   (b) je proces Z_{τ_k} stejnoměrně integrovatelným martingalem.

4. Nechť $0 \geq M_n$ je $\mathcal{F}_n$-martingal, který je nezávislý s posloupností stejně rozdělených náhodných veličin $(X_n, n \in \mathbb{N})$ s hodnotami v $\mathbb{N}_0$. Označme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Rozhodněte, zda je proces
   (a) $N_n = M_{S_n}$ sub/super-martingalem
   (b) $\exp\{N_n\}$ sub/super-martingalem.

---

1. Optional Sampling Theorem (jednodimenzionální případ)

   Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $\mathcal{F}_n$-submartingal a $\nu \leq \tau$ jsou skoro jistě konečné $\mathcal{F}_n$-markovské časy. Pak
   $$[S_\nu, S_\tau \in \mathbb{L}_1 \quad \text{a} \quad \liminf_{n\to\infty} E(S_n^+ 1_{[\tau>n]}) = 0] \quad \Rightarrow \quad S_\nu \leq E[S_\tau|\mathcal{F}_\nu] \quad \text{s.j.}$$
   Levá (a tedy i pravá) strana platí, pokud navíc $\nu, \tau \in \mathbb{L}_\infty$.

2. Je-li $(S_t, t \in T)$ submartingal vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_t$, pak je $\mathcal{F}_t$-martingalem právě tehdy, když má konstantní střední hodnotu.

   Důkaz: Pro $s, t \in T$ a $s \leq t$, $X := E[S_t|\mathcal{F}_s] - S_s \geq 0$ s.j. a $EX = ES_t - ES_s = 0$. Tedy $X = 0$ s.j.

3.* Je-li $(M_t, t \in T)$ stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_t$-martingal, pak existuje $M_\infty \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_\infty)$ taková, že
   $$M_t = E[M_\infty|\mathcal{F}_t], \quad t \in T.$$